Note sur les volatilités instantanées "à la Dupire"

Raphaël Douady

October 8, 2001

Abstract

On calcule les volatilités instantanées à partir des volatilités implicites usuelles, et non en dérivant les prix des options, comme le fait Bruno Dupire, ce qui pose des problèmes très loin de la monnaie.

1. Rappel sur les volatilités instantanées

Bruno Dupire a montré, dans des travaux récents, que l'on pouvait déduire des prix de marché des options de tous les strikes et de toutes les maturités, la valeur implicitement supposée par le marché de la volatilité instantanée comme fonction du couple (S, t). Son argument repose sur un strict raisonnement d'arbitrage, mais on peut en donner une idée intuitive. On sait que l'équation de Black et Scholes relie le Θ et le Γ d'une option (écrite ici au taux d'intérêt près):

$$\Theta + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,S^2\,\Gamma = 0 \tag{1.1}$$

et la valeur de σ qui intervient ici est bien la volatilité implicite.

Notons $C(K, T)$ la valeur d'un call de maturité T et de strike K. En comparant la valeur des "calendar spreads" et des "butterflies", il montre que la volatilité instantanée implicite $\tilde{\sigma}$ vérifie :

$$\frac{\partial C}{\partial T} - \frac{1}{2}\,\tilde{\sigma}^2\,K^2\,\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = 0 \tag{1.2}$$

Le changement de signe vient du fait que la maturité se raccourcit lorsque le temps évolue, donc la dérivée partielle par rapport à la maturité vaut $-\Theta$.

Plus intéressant est le changement du spot S en strike K , dû au fait que les prix des options sont des espérances de pay-off, mais, en l'occurrence, la combinaison d'options qui amène à cette équation est nulle si $S_T = K$. Par conséquent, on peut considérer cette équation comme conditionnée par l'égalité $S_T = K$.

Si l'on prend en compte les taux d'intérêt (r pour le domestique, q pour l'étranger), l'équation (1.1) est modifiée :

$$\Theta + \frac{1}{2}\,\sigma^2\, S^2\, \Gamma = r\,(C - S\,\Delta) + qS\,\Delta \tag{1.3}$$

Lorsque l'on passe aux volatilités instantanées, l'équation de Dupire conserve le terme en $rS\Delta$ car il correspond à la dérive de la monnaie forward, mais le terme rC disparaît à cause du recul de la date d'exercice de l'option. L'équation (1.2) devient :

$$\frac{\partial C}{\partial T} - \frac{1}{2}\,\tilde{\sigma}^2\, K^2\, \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + (r-q)\, K\, \frac{\partial C}{\partial K} + q\, C = 0 \tag{1.4}$$

2. Surface des volatilités implicites

On suppose ici que le prix des calls est calculé à partir d'une fonction $\sigma(K,T)$ grâce à la formule de Black et Scholes :

$$C(K,T) = S\, e^{-qT}\, N(d_1(K,T)) - K\, e^{-rT}\, N(d_2(K,T))$$

où

$$\begin{aligned} d_1(K,T) &= \frac{\log\frac{S}{K} + rT}{\sigma(K,T)\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\,\sigma(K,T)\sqrt{T} \\ d_2(K,T) &= d_1(K,T) - \sigma(K,T)\sqrt{T} \end{aligned}$$

Les dérivées partielles de C par rapport à K et T à σ constant sont des formules bien connues. Cependant, pour écrire l'équation (1.4), on doit tenir compte de la part de Véga issue des dérivées de $\sigma(K,T)$ par rapport à K et T . On a ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{\partial C}{\partial T}\Big|_{\sigma \text{ cst}} + \frac{\partial C}{\partial \sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial T} \\ \frac{\partial C}{\partial K} &= \frac{\partial C}{\partial K}\Big|_{\sigma \text{ cst}} + \frac{\partial C}{\partial \sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial K} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} &= \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}\Big|_{\sigma \text{ cst}} + 2\,\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial C}{\partial K}\Big|_{\sigma \text{ cst}}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial K} + \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial K}\right)^2 + \frac{\partial C}{\partial \sigma}\,\frac{\partial^2 \sigma}{\partial K^2} \end{aligned}$$

On rappelle les formules des "Greeks" de Black et Scholes :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial T}|_{\sigma \text{ cst}} &= \frac{\sigma S e^{-qT}}{2\sqrt{T}}\, N'(d_1) + rK\, e^{-rT}\, N(d_2) - qK\, e^{-qT}\, N(d_1) \\
\frac{\partial C}{\partial K}|_{\sigma \text{ cst}} &= -e^{-rT}\, N(d_2) \\
\frac{\partial C}{\partial \sigma} &= S\sqrt{T}\, N'(d_1)
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}|_{\sigma \text{ cst}} &= \frac{S}{K^2 \sigma \sqrt{T}}\, N'(d_1) \\
\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial C}{\partial K}|_{\sigma \text{ cst}}\right) &= \frac{S\, d_1}{K\, \sigma}\, N'(d_1) \\
\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2} &= \frac{S\, d_1 d_2 \sqrt{T}}{\sigma}\, N'(d_1)
\end{aligned}
$$

Cela nous donne :

$$
\frac{\partial C}{\partial T} + (r-q)\, K\, \frac{\partial C}{\partial K} + q\, C = S\, e^{-qT}\sqrt{T}\, N'(d_1)\left(\frac{\sigma}{2T} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} + (r-q)\, K\, \frac{\partial \sigma}{\partial K}\right)
$$

et

$$
\frac{1}{2} K^2\, \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{S\, e^{-qT}}{2\sigma\sqrt{T}}\, N'(d_1)\left(1 + 2Kd_1\sqrt{T}\frac{\partial \sigma}{\partial K} + K^2 d_1 d_2 T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial K}\right)^2 + K^2 \sigma T\, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial K^2}\right)
$$

Le carré de la volatilité instantanée implicite $\tilde{\sigma}^2$ sera le quotient de ces deux expressions et on a :

$$
\tilde{\sigma} = \sigma \sqrt{\frac{1 + 2\,\frac{T}{\sigma}\,\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} + (r-q)\, K\, \frac{\partial \sigma}{\partial K}\right)}{1 + 2Kd_1\sqrt{T}\frac{\partial \sigma}{\partial K} + K^2 d_1 d_2 T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial K}\right)^2 + K^2 \sigma T\, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial K^2}}}
$$

3. Variables logarithmiques

Il est assez naturel de changer la variable strike K en son logarithme $k = \log(K/S)$, en particulier si l'on calcule les dérivées de la volatilité implicite par une différence discrète. On a alors :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial k} = K\,\frac{\partial\sigma}{\partial K} \qquad\qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2} = K\,\frac{\partial\sigma}{\partial K} + K^2\,\frac{\partial^2\sigma}{\partial K^2}$$

et, en notant $F = e^{(r-q)T}S$ le forward et $h = \log(F/S) = (r-q)\,T$:

$$\tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{\frac{1 + 2\,\frac{T}{\sigma}\,\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T} + (r-q)\,\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)}{1 + 2\frac{h-k}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial k} + \left(\frac{(h-k)^2}{\sigma^2} - \frac{1}{4}\sigma^2 T^2\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)^2 + \sigma T\,\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}}}$$

Il est moins habituel, mais l'expérience montre que c'est justifié, de prendre aussi le logarithme de la maturité pour discrétiser la structure temporelle de la volatilité. Comme précédemment, en définissant $\tau = \log(T/T_1)$, où T_1 est une unité (par exemple $T_1 = 1\,\text{an}$), on a :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} = T\,\frac{\partial\sigma}{\partial T}$$

et

$$\tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\sigma}\,\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + (r-q)\,T\,\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)}{1 + 2\frac{h-k}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial k} + \left(\frac{(h-k)^2}{\sigma^2} - \frac{1}{4}\sigma^2 T^2\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)^2 + \sigma T\,\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}}}$$

Remarque 1 : Si l'on tient compte de la structure des taux d'intérêt, alors les r et q du numérateur sont des taux spot forward f et f' de maturité T et ceux du dénominateur sont des taux zéro-coupon, on a :

$$\tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\sigma}\,\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + (f-f')\,T\,\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)}{1 + 2\frac{h-k}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial k} + \left(\frac{(h-k)^2}{\sigma^2} - \frac{1}{4}\sigma^2 T^2\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)^2 + \sigma T\,\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}}}$$

Remarque 2 : Pour les maturités courtes ($T \to 0$), la volatilité implicite et la volatilité locale sont liées par la formule :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma^2}{\sigma - k\,\frac{\partial\sigma}{\partial k}}$$

Ce résultat doit s'expliquer facilement par la théorie des grandes déviations. Bien évidemment, à la monnaie, on a $k = 0$ et $\tilde{\sigma} = \sigma$.

4. Discrétisation

Généralement, la fonction $\sigma(K,T)$ ou $\sigma(k,\tau)$ est donnée sous forme d'une table à deux entrées. Cependant, les variables ne sont pas régulièrement réparties (si les strikes le sont, c'est qu'une interpolation a été faite, et les maturités ne le sont jamais). La formule usuelle qui donne la dérivée sur le noeud i par la différence finie entre les noeuds $i+1$ et $i-1$ n'est plus une approximation au second ordre. Pour retrouver cet ordre d'erreur en utilisant seulement trois noeuds, on suppose que la fonction est une parabole qui passe par les trois valeurs connues. La dérivée et la dérivée seconde sont alors approchées par celles de cette parabole.

Soit par exemple $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On suppose donnés trois points $x_0 < x_1 < x_2$ et leurs images $y_i = f(x_i)$. On obtient l'approximation suivante :

$$f'(x_1) \simeq \frac{(x_2-x_1)\,(y_1-y_0)}{(x_2-x_0)\,(x_1-x_0)} + \frac{(x_1-x_0)\,(y_2-y_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)}$$

C'est en fait un barycentre des pentes de f entre x_0 et x_1 et entre x_1 et x_2 qui tient compte de la position de x_1 . La dérivée seconde est donnée par la formule suivante :

$$f''(x_1) \simeq 2\,\frac{y_2\,(x_1-x_0)+y_0\,(x_2-x_1)-y_1\,(x_2-x_0)}{(x_1-x_0)\,(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)}$$

Il est aisé de vérifier que l'on obtient les formules habituelles si $x_1 = \frac{1}{2}\,(x_0+x_2)$. C'est aussi la valeur de x_1 pour laquelle l'approximation est la meilleure.

On voit que l'on obtient des approximations différentes si l'on opère un changement de variable. C'est pourquoi je recommande de travailler en variables logarithmiques, aussi bien en "espace" (strikes) qu'en temps. Ceci d'autant plus que l'on se heurte à un problème mal posé. Comme dans le calcul des taux forward spot, calculer des dérivées à partir de données qui sont arrondies à un certain nombre de chiffres après la virgule amène à de grosses distorsions.